

Gruppenübung 7

Aufgabe 1 Wie aus der Vorlesung bekannt, ist für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{p \times q}$ mit Rang r die Singulärwertzerlegung

$$A = U \Sigma V^*$$

möglich.

Hierbei sind $U \in \mathbb{C}^{p \times p}$ und $V \in \mathbb{C}^{q \times q}$ unitär (d.h. $V^*V = VV^* = I$ und $U^*U = UU^* = I$).

Weiterhin gilt

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

mit den Singulärwerten $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

a) Zeigen Sie, dass

$$A^*A = V \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^2 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}}_{q \times q} V^* \text{ und } AA^* = U \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^2 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}}_{p \times p} U^*.$$

Erklären Sie den Zusammenhang der Eigenwerte von A^*A beziehungsweise AA^* mit den Singulärwerten von A .

b) Berechnen Sie U , V , und Σ für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

mithilfe des Aufgabenteils a).

Hinweis: Vom numerischen Standpunkt aus gesehen ist dies eine sehr ineffiziente Methode um die Singulärwertzerlegung zu berechnen. In der Praxis werden Methoden auf Basis der Householder-Transformation und der QR-Transformation verwendet (siehe zum Beispiel Deuffhard, *Numerische Mathematik 1*, Kapitel 5.4).

Aufgabe 2 Gegeben sei ein System mit zwei Eingängen und einem Ausgang wie in Abbildung 1 dargestellt.

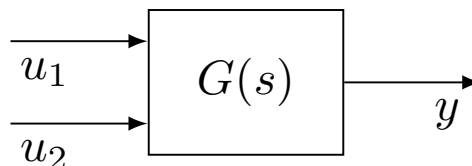


Abbildung 1: MISO-System

Die Übertragungsfunktion ist gegeben durch

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{s+1} & \frac{4}{2s+1} \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung

$$G(0) = U\Sigma V^*$$

mit $V := \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$.

b) Nehmen Sie nun an, dass ein Eingangssignal $u(t) = [u_1(t), u_2(t)]^T$ gegeben ist mit

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \text{ s} \\ v_2 & 2 \text{ s} \leq t < 15 \text{ s} \\ v_1 + v_2 & 15 \text{ s} \leq t \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Verlauf von $y(t)$.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die H_∞ -Norm der Übertragungsfunktion G definiert durch

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}.$$

Aufgabe 4 Gegeben sei ein kausales System G_0 und eine Menge von Systemen Π mit

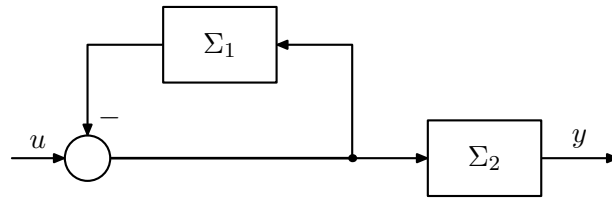
$$\Pi := \{G \text{ kausale Übertragungsfunktion} \mid G = k_p G_0, k_p \in [k_{\min}, k_{\max}] \subset \mathbb{R}\}.$$

Finden Sie eine kausale Übertragungsfunktion G_1 und ein $r \in \mathbb{R}$ so, dass

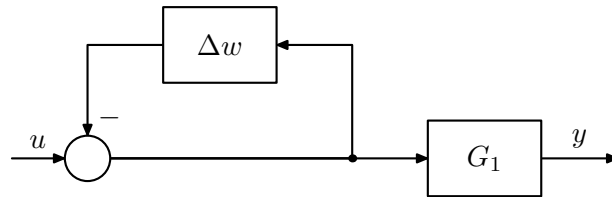
$$\Pi = \{G \text{ kausale Übertragungsfunktion} \mid G = G_1(1 + r\Delta), \Delta \in \mathbb{R}, |\Delta| \leq 1\}.$$

Welcher Art von Unsicherheitsbeschreibung entspricht diese Umformung?

Aufgabe 5 Gegeben seien kausale Systeme Σ_1, Σ_2 . Wir betrachten ein Übertragungssystem wie in Abbildung 2(a) skizziert.



(a) Übertragungssystem zur Aufgabe 5 a)



(b) Übertragungssystem zur Aufgabe 5 b)

Abbildung 2

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion von u nach y des Übertragungssystems aus Abbildung 2(a).

b) Gegeben Sei nun ein kausales System G_0 und eine Menge von Systemen Π mit

$$\Pi := \{G \text{ kausale Übertragungsfunktion} \mid G(s) = \frac{1}{Ts + 1} G_0, T \in [T_{\min}, T_{\max}] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

Finden Sie kausale Übertragungsfunktionen G_1 und w , so dass wir die Systeme aus Π durch das Übertragungssystem aus Abbildung 2(b) beschreiben können, wobei $|\Delta| \leq 1$ ist.